4.11.1959

VAKUUTUSMATEMAATTISIA EDUSMERKKEJÄ

Sisällys

I MERKINTÄPERIAATTEITA

1. Kirjainten tyyppi

1.1. Isot roomalaiset kirjaimet:

Kommutaatiolukuja, esim. D, N;
vuosi- ja kertamaksuja, rahastoja, esim. P, A, V;
havaittuja lukusarjoja, esim. L, I;
suoritusten määriä, esim. S, E, K.

1.2. Pienet roomalaiset kirjaimet:

Laskuperusteina olevia lukusarjoja, esim. l, s;
epäjatkuvia suureita, esim. p, q, i, r;
ikää, kestoa ym. ylä- ja alaviitoissa.

1.3. Pienet kreikkalaiset kirjaimet:

Eräitä jatkuvia intensiteettifunktioita, esim. μ, δ, π;
kuormitusparametrejä, esim. ε, $\varkappa$.

2. Ylä- ja alaviitat

2.1. Vasen alaviitta

2.1.1. Välittömästi päämerkin vasemmalla puolella oleva viitta ilmoittaa sen aikavälin pituutta, johon todennäköisyys kohdistuu; jos n = 1, ei sitä merkitä. Myöskin voi tämä viitta tarkoittaa kulunutta vakuutusaikaa tai kestoa. Esim.

$$ {}_np_x \;, \quad {}_tV_x \;. $$

2.1.2. Viitta suluissa merkitsee odotusaikaa (odotusajalla tarkoitetaan tässä aikaa vakuutustapahtumasta korvaukseen oikeuttavan ajanjakson alkuun). Esim.

$$ {}_{(m)}s_{[x]+t} \;. $$

2.1.3 Pystysuoran poikkiviivan edellä oleva edusmerkki tarkoittaa lykkäysaikaa. Esim.

$$ {}_{m|}\bar{a}_{x:\overline{n}|} = {}_{m|}\bar{a}_{x:x+m+n} = {}_{m|n}\bar{a}_x = \bar{a}_{x:\overline{m+n}|} - \bar{a}_{x:\overline{m}|} \;. $$

2.2. Oikea alaviitta

2.2.1. Välitön edusmerkki alaviitassa tarkoittaa ikää, kulman alle merkitty kestoa ja kaksoispisteen jälkeinen edusmerkki ilman kulmaa päättymisikää (yhden henkilön ollessa kysymyksessä). Milloin epäselvyyttä ei synny, voidaan kaksoispistettä yleensäkin käyttää erottamaan erilaisia suureita. Välimerkkinä toisiinsa rinnastettujen suureiden välillä voidaan käyttää puolipistettä, erityisesti silloin kun suureet ovat numeroita. Esim.

$$\bar{a}_{xyz:\overline{w-z}|}, \quad \bar{a}_{25;27;30:\overline{35}|}, \quad \bar{a}_{25,5;31} = \bar{a}_{25\frac{1}{2};31} .$$

Jos ikätunnukset ovat numeroita ja halutaan erityisesti merkitä, ketä vakuutettua mikin ikä tarkoittaa, voidaan ikien eteen kirjaimilla x, y ja z merkitä, tarkoitetaanko miestä, naista vai lasta. Esim.

$$\bar{A}_{x30|y25;z1}(K, \text{EPL } 21/35)$$

vastuun pääoma-arvo perhe-eläkevakuutuksesta; miehen, vaimon ja lapsen alkuiät 30, 25 ja 1 vuotta.

2.2.2. Pystyviiva erottaa kahta toisiaan seuraavaa edusmerkkiä, jos vasemman puoleiseen merkkiin liittyvän tapahtuman edellytetään sattuvan ensin. Esim.

$\bar{a}_{x|y} = \bar{a}_y - \bar{a}_{xy}$ jälkeenelokorko.

$\bar{A}_{x|z}(K(21-z); V)$ vastuun pääoma-arvo vakuutuksesta, jossa vakuutussumma suoritetaan (x):n kuoltua, mikäli (z) silloin elää ja mikäli kuolemantapaus sattuu ennenkuin (z) täyttää iän 21.

2.2.3. Vaakasuora viiva viitan edusmerkkien päällä kohdistaa vakuutustapahtuman ko. ryhmän viimeisenä jäljelläolevaan henkilöön eli ryhmän lopulliseen katoamiseen. Esim.

$$p_{xy} = p_x p_y \qquad q_{xy} = 1 - p_x p_y$$

$$p_{\overline{xy}} = 1 - q_x q_y \qquad q_{\overline{xy}} = q_x q_y$$

$\bar{a}_{\overline{xy}} = \bar{a}_x + \bar{a}_y - \bar{a}_{xy}$ elinkorko viimeisen kuolemaan asti.

$\bar{A}_{\overline{xy}}(KS)$ vastuun pääoma-arvo vakuutuksesta, josta suoritetaan sairauskorvausta ajalta, jolloin molemmat vakuutetut ovat sairaita, ja vakuutussumma vasta molempien kuoltua.

2.2.4. Alkuikä tai muu aikatunnus hakasuluissa merkitsee selektiä. Esim.

$$l_{[x]+t} = {}_t l_x = f(x,x+t) = g(x,t) .$$

$l^{ia}_{[x]+[t]}$ niiden x-vuotiaina invaliideina vakuutettujen luku, jotka t vuoden kuluttua tulevat uudelleen yhtiön tarkastettaviksi (esim. jälkitarkastus) ja todetaan tällöin aktiiveiksi.

2.2.5. Aikamäärä kaarisuluissa liittyy vastaavana järjestyksessä olevaan oikean yläviitan kirjaimeen ja osoittaa, kuinka pitkä aika edellisen kirjaimen tarkoittamasta tapahtumasta on kulunut ko. kirjaimen tarkoittamaan tapahtumaan. Esim.

$\pi^{\overline{ai|k}}_{[x]+(t)+(u)}$ sellaisen x+t+u - vuotiaan invaliidin kuolevuus, joka on tullut vakuutetuksi aktiivina x-vuotiaana ja sairastunut t vuoden kuluttua; edellytyksenä on lisäksi, ettei aikavälillä (x,x+t+u) ole muita tapahtumia.

$\pi^{\overline{ia|i}}_{[x]+(t)+(u)}$ sellaisen x+t+u -vuotiaan aktiivin sairastuvuus, joka on tullut vakuutetuksi invaliidina x-vuotiaana ja kuntoutunut t vuoden kuluttua; edellytyksenä on lisäksi, ettei aikavälillä (x, x+t+u) ole muita tapahtumia.

Aikamäärä kaarisuluissa liittyy siis siihen hetkeen, jolloin tapahtuu siirtyminen tietystä kollektiivista toiseen; aikamäärä ilman sulkuja tai aaltosuluissa (vrt. 2.2.6.) kuvaa tiettyyn kollektiiviin kuulumista tarkasteluhetkellä.

2.2.6. Aikamäärä aaltosuluissa liittyy vastaavana järjestyksessä olevaan oikean yläviitan kirjaimeen ja osoittaa, kuinka pitkä aika edellisen kirjaimen tarkoittamasta tapahtumasta tai tarkkailuhetkestä on kulunut ko. kirjaimen tarkoittamaan tarkkailuhetkeen. Aaltosulkuja tarkkailuhetkeen liittyvän aikamäärän yhteydessä käytetään vain, mikäli selvyys niin vaatii. Esim.

$l^{\overline{aii|i}}_{[x]+(t_1)+\{t_2\}+t}$ niiden x-vuotiaana aktiivina vakuutettujen luku, jotka ovat sairastuneet t_1 vuoden kuluttua, ovat edelleen invaliideina tarkkailuhetkellä t_2 vuoden kuluttua sairastumisesta samoinkuin uutena tarkkailuhetkenä edellisestä t vuoden kuluttua.

2.3. Oikea yläviitta

2.3.1. Sulkeissa oleva luku ilmoittaa moneenko osaan vuosi on jaettu, ts. tapahtumien aikavälin käänteislukua. Esim.

$\ddot{a}_x^{(4)}$ etukäteisesti 4 kertaa vuodessa 1/4:n suuruisina erinä maksettavan elinkoron pääoma-arvo.

2.3.2. Kirjaimet tarkoittavat tiettyä tapahtumaa, esim. k kuolemis-, i sairastumis-, a kuntoutumis-, n avioitumis-, e eroamis-, s syntymis-, n_u uudelleenavioitumis- ja d adoptoimistapahtumaa, tai tilannetta tietyllä tarkkailuhetkellä, esim. i invaliidina ja a aktiivina olemista. Yläviittaan kuuluvan edusmerkin ollessa ilman sulkuja (tai hakasuluissa) liittyy se oikeaan alaviittaan sisältyvään, järjestyksessä vastaavaan edusmerkkiin. Esim.

$\pi^{a|i}_{[x]+(t)}$ sellaisen x+t -vuotiaan vakuutetun sairastuvuus, joka on tullut vakuutetuksi aktiivina x-vuotiaana; aikavälin (x,x+t) tapahtumista ei edellytetä mitään.

Alleviivattu kirjain tarkoittaa vastakkaiseen ryhmään (komplementtiryhmään) kuulumista. Milloin kaksi kirjainta on tarpeen tietyn tapahtuman tai tilanteen kuvaamiseksi, asetetaan ne hakasulkeihin. Esim.

$l^{[na]|[\underline{n}a]}_{[x]+t}$ niiden x-vuotiaina naimattomina aktiiveina vakuutettujen luku, jotka x+t -vuotiaina ovat naimisissa mutta edelleen aktiiveina.

Mikäli kirjaimien yläpuolella on vaakasuora viiva, edellyttää se, ettei ko. kirjaimien tarkoittamien tapahtumahetkien välillä satu mitään tämänlaista ryhmästä toiseen siirtymistä. (Ilman viivaa ei tätä edellytystä tehdä.) Esim.

$_{t_3}p^{\overline{ai|a}}_{[x]+(t_1)+(t_2)}$ todennäköisyys sille, että $x+t_1+t_2$ -vuotias aktiivi pysyy aktiivina t_3 vuotta, kun hän on tullut vakuutetuksi aktiivina x-vuotiaana, sairastunut tästä t_1 vuoden kuluttua ja parantunut tästä t_2 vuoden kuluttua; edellytettynä että aikavälillä $(x,x+t_1+t_2)$ ei ole sattunut muita tapahtumia.

Yläviitassa olevien kirjaimien merkitseminen sulkeisiin tarkoittaa, että niiden edellyttämät tapahtumat voivat sattua, oikeassa järjestyksessä, missä tahansa sillä välillä, jonka sulkujen ulkopuolella lähimpänä olevat merkit määräävät, ts. suure on integroitu näiden tapahtumien ajankohtien yli. Esim.

$\pi^{\overline{a(ia)|k}}_{[x]+t}$ sellaisen x+t -vuotiaan aktiivin kuolevuus, joka on tullut vakuutetuksi aktiivina x-vuotiaana, sairastunut kerran tämän jälkeen ja kuntoutunut ennen ikää x+t.

2.3.3. Viittaan sisältyvä pystyviiva erottaa ehtona olevia tapahtumia tarkoittavat kirjaimet (pystyviivan vasemmalla puolella) niistä tapahtumia tai ryhmässä säilymistä kuvaavista kirjaimista, joita ehdollinen todennäköisyys tai lukusarja tai elinkorko koskee. Esim.

$\bar{a}^{aa|i}_{[x]+t;w}$ sellaisen invaliidikoron pääoma-arvo, jota maksetaan vakuutetulle ikävälillä $(x+t,w)$ sen ajan, minkä hän tulee olemaan invaliidina; edellytyksenä on, että hän on tullut vakuutetuksi aktiivina x-vuotiaana ja on aktiivina iässä x+t.

$\pi^{\overline{ai|n}}_{[x]+(t)+(u)}$ x+t -vuotiaana invaliidiksi tulleen invaliidin avioituvuus iässä x+t+u; edellytyksenä on, että hän on tullut vakuutetuksi aktiivina x-vuotiaana.

Mikäli on kysymyksessä intensiteettifunktio, on se kerrottava niin monella differentiaalilla kuin pystyviivan oikealla puolella on kirjaimia, jotta saataisiin vastaava todennäköisyys. Esim.

$${}^{\overline{ai n|ek}}_{\pi}{}_{[x]+(t_1)+(t_2)+(t_3)+(t_4)}\, dt_3\, dt_4$$

todennäköisyys sille, että $x+t_1+t_2+t_3$ -vuotias naimisissa oleva henkilö eroaa aikavälillä dt_3, ja ajan t_4 kuluttua siitä kuolee aikavälillä dt_4; edellytyksenä on, että hän on tullut vakuutetuksi aktiivina x-vuotiaana, sairastunut t_1 vuoden kuluttua ja mennyt naimisiin tästä t_2 vuoden kuluttua.

2.3.4. Viitassa esiintyvä piste osoittaa sitä, että kaikki vastaavan tapahtuman tai tarkkailuhetken kysymykseentulevat vaihtoehdot ovat mahdollisia. Esim.

$$l^{\cdot a}_{[x]+t} = l^{aa}_{[x]+t} + l^{ia}_{[x]+t}$$

$$\pi^{a|\cdot}_{[x]+(t)} = \pi^{a|k}_{[x]+(t)} + \pi^{a|i}_{[x]+(t)}\,.$$

2.3.5. Merkit + ja - tarkoittavat seuraavia puolirajoitettuja funktioita:

$$k^{+} = \begin{cases} k & \text{kun } k \geqq 0 \\ 0 & \text{kun } k < 0 \end{cases} \qquad k^{-} = \begin{cases} 0 & \text{kun } k > 0 \\ k & \text{kun } k \leqq 0 \end{cases}$$

jolloin $k^{+} + k^{-} = k$.

2.4. Yläviitta keskellä

Vaakasuora viiva osoittaa ns. jatkuvan menetelmän soveltamista, kaksi pistettä etukäteistä suoritustapaa ja pieni ympyrä täydellistä arvoa. Esim.

$\bar{a}_x$ jatkuvan elinkoron pääoma-arvo.

$\ddot{a}_x$ etukäteisen elinkoron pääoma-arvo.

$\mathring{a}_x$ täydellisen jälkikäteisen elinkoron pääoma-arvo.

a_x

2.5. Vasen yläviitta

2.5.1. Joissakin tapauksissa voidaan käyttää merkkejä b, n, r, m, z, re pr osoittamaan, minkälaista vastuun pääoma-arvoa, maksua, rahastoa tms. tarkoitetaan, jolloin b = "brutto-", n = "netto-", r = "rahasto-", m = "muutos-", z = "zillmeerattu", re = "retrospektiivinen" ja pr = "prospektiivinen". Alleviivaus muuttaa kirjaimen tarkoituksen vastakkaiseksi (komplementtikäsite).

Esim.

re_V retrospektiivisesti laskettu rahasto.

$\underline{z}_V$ zillmeeramaton rahasto.

2.6. Moninkertaiset viitat

Milloin edusmerkkiin liittyy useampia erilaisia, samaan paikkaan kuuluvia viittoja, käytetään edusmerkin ympärillä sulkumerkkejä.

Esim.

$(a_{x:w}^{a|i})^{(4)}$ jälkikäteisesti neljännesvuosittain maksettava invaliidikorko x-vuotiaalle aktiiville.

3. Sulkeissa olevat merkinnät edusmerkin jäljessä

3.1. Edusmerkin jäljessä voi sulkeissa olla vakuutuksen taulumerkintä. Taulumerkintä on muotoa

X w , X w:y , X w/m ; X(n) , X(n):y , X(n)/m ,

jossa X tarkoittaa vakuutuksen perustunnusta, esim.

A, Y, K, V, VP, YHK, Y3K, S21(14), Sv, Sm, Tp,

RA, RK, EVSPL, REV,

tai yhdistelmää näistä, ja w on vakuutuksen päättymisikä, y maksujen päättymisikä, n vakuutusaika ja m maksujen suoritusaika. Välimerkkinä eri taulumerkintöjen välillä voidaan käyttää merkkiä +, mikä on tarpeellinen varsinkin silloin, kun osien aikatunnukset ovat erilaiset. Aikatunnusten välillä on puolipiste joskus tarpeellinen.

Esim.

$\bar{A}_x(Y\ w)$, $\bar{P}_x(Y\ w/m)$,

$P_x(S20(30);\ (30))$,

$P_{25}(Y3K\ \ 65/15 + S20(30)\ \ 60/10 + Tp\ 65)$.

3.2. Sulkeissa oleva taulumerkintä voi tarkoittaa myöskin tämän vakuutusmuodon vakuutustapahtumaa, esim. K kuolemista, V elämistä määräikään, S sairastumista jne. Päämerkin oikea alaviitta osoittaa tarkemmin, seuraako tätä vakuutustapahtumaa suoritus vai onko vakuutustapahtuma vain edellytys sille, että jotakin myöhempää vakuutustapahtumaa seuraa suoritus. Esim.

$\bar{A}_{x\|yz}(K;\ EP\ 65 + EL\ 21)$	vastuun pääoma-arvo perhe-eläkevakuutuksesta, jossa miehen kuoleman jälkeen maksetaan eläkettä leskelle ikään 65 saakka ja orvolle ikään 21 saakka.

4. Aikayksikkö

Aikaa tai ikää tarkoittavien edusmerkkien aikayksikkö on yleensä vuosi, milloin ei erityisesti muuten ole yksikköä määritelty. Vasemmassa alaviitassa olevan odotusajan (vrt. 2.1.2.) yksikkönä ovat muutkin aikayksiköt yhtä mahdollisia; yksikkö on tällöin määriteltävä, ellei asia ole ilmeinen. Esim.

${}_tp_x$	todennäköisyys, että x-vuotias vakuutettu pysyy elossa seuraavat t vuotta.
$V_{[30]+2}$	muutosarvo, kun alkuikä on 30 vuotta ja kulunut vakuutusaika 2 vuotta.
$(30)^s{}_x$	päiväkorvauksen pääoma-arvo (vrt. III 8), kun odotusaika on 30 päivää.
$(13)^i{}_x$	sairastumistodennäköisyys, kun odotusaika on 13 kuukautta.
$(14)^k{}_x$	sairauden kesto, kun odotusaika on 14 päivää.

II YLEISLUONTOISTEN PERUSKÄSITTEIDEN MERKITSEMINEN

Kirjaimella l merkitään tiettynä hetkenä tietyssä tilassa olevien vakuutusobjektien lukumäärää. Oikea alaviitta ilmoittaa ajanhetket, milloin ryhmä on ollut tarkkailtavana tai milloin on tapahtunut siirtyminen ryhmästä toiseen (vrt. 2.2.4., 2.2.5. ja 2.2.6.). Oikeassa yläviitassa olevat kirjaimet, jotka liittyvät vastaavassa järjestyksessä oleviin alaviitan osiin, ilmoittavat missä tilassa ryhmä on ollut tarkkailuhetkellä tai mihin tilaan se on ko. hetkellä siirtynyt (vrt. 2.3.2.).

l-sarjat normeerataan tavallisesti alkavaksi luvusta 10^n, jossa n on kokonaisluku. Milloin l:n oikeassa yläviitassa esiintyy pystyviiva, kohdistuu normeeraus siihen tarkkailu- tai tapahtumahetkeen, jota edustaa välittömästi pystyviivan vasemmalla puolella oleva kirjain. Muulloin kohdistuu normeeraus ensimmäisen kirjaimen tarkoittamaan hetkeen. Esim.

$l^{a|a}_{[x]+t}$ — 10^n:sta x-vuotiaina aktiiveina vakuutetuista t vuoden kuluttua jäljellä olevien aktiivien luku

$l^{\overline{aa|ii}}_{[x]+\{t\}+(u)+v}$ — luku joka ilmoittaa, kuinka monta 10^n:sta x+t -vuotiaista aktiiveista, jotka ovat tulleet vakuutetuiksi aktiiveina x-vuotiaina, on sellaisia, jotka pysyvät aktiiveina u vuotta, tulevat tällöin invaliideiksi aikavälillä du (x+t+u, x+t+u+du) ja pysyvät senjälkeen invaliideina vähintään v vuotta.

$$\lim_{\substack{u \to +0 \\ v \to +0}} l^{\overline{aa|ii}}_{[x]+\{t\}+(u)+v} = l^{\overline{aa|ii}}_{[x]+\{t\}+(0)+0} = 10^n.$$

$l^{\underline{n}|n}_{[x]+t}$ — 10^n:sta x-vuotiaina naimattomina vakuutetuista t vuoden kuluttua naimisissa olevien luku.

$$l^{\circ|i}_{[x]+t} = l^{i|i}_{[x]+t} + l^{a|i}_{[x]+t}$$

$$l^{i|i}_{[x]+t} = l^{\overline{i|i}}_{[x]+t} + l^{\overline{i|(ai)i}}_{[x]+t} + l^{\overline{i|(aiai)i}}_{[x]+t} + \dots$$

$$l^{a|i}_{[x]+t} = l^{\overline{a|(i)i}}_{[x]+t} + l^{\overline{a|(iai)i}}_{[x]+t} + \dots$$

$$l^{\overline{a|(ia)a}}_{[x]+v} = \int_{t=o}^{v}\int_{u=o}^{v-t} l^{\overline{a|iaa}}_{[x]+(t)+(u)+\{v-t-u\}}\, dt\, du$$

Kirjaimella p merkitään todennäköisyyttä, että vakuutusobjekti pysyy ryhmässä tietyn ajan, tai todennäköisyyttä, että tietyn ajan kuluessa tapahtuu siirtyminen ryhmästä toiseen. p-luvut ovat normeerausta vailla samoja kuin vastaavalla tavalla merkityt l-luvut. Esim

$$l^{\overline{ai}|i}_{[x]+(t)+u} = 10^{n}\cdot p^{\overline{ai}|i}_{[x]+(t)+u}$$

$$l^{\overline{aa}|i}_{[x]+\{t\}+u} = 10^{n}\cdot p^{\overline{aa}|i}_{[x]+\{t\}+u}$$

Kirjaimella π merkitään siirtymisintensiteettiä, ja tämän merkin ylä- ja alaviitoilla, joita käytetään samalla tavalla kuin l-sarjoissa, ilmaistaan tarkemmin, mistä joukosta mihin siirtyminen tapahtuu ja minä hetkenä. Luvut π määritellään l-sarjojen avulla. Esim.

$$l^{\overline{a|ak}}_{[x]+\{t\}+(dt)} = \pi^{\overline{a|k}}_{[x]+(t)} \cdot l^{\overline{a|a}}_{[x]+t}\, dt$$

$$l^{\overline{aa|iik}}_{[x]+\{t\}+(u)+\{v\}+(dv)} = \pi^{\overline{aa|ik}}_{[x]+\{t\}+(u)+(v)}\; l^{\overline{aa|ii}}_{[x]+\{t\}+(u)+v}\, dv .$$

$$\pi^{k|k}_{[x]+(t)} = \mu_{[x]+t}\,, \qquad \pi^{k}_{(x+t)} = \mu_{x+t}$$

$$\pi^{a|i}_{[x]+(t)} = \iota_{[x]+t}\,; \qquad \pi^{i}_{(x+t)} = \iota_{x+t}$$

$$\pi^{\overline{i|\cdot}}_{(x)+(t)} = \pi^{\overline{i|a}}_{(x)+(t)} + \pi^{\overline{i|k}}_{(x)+(t)} = \rho_{(x)+t} .$$

Lukujen p (tai lukujen l) avulla voidaan laskea erilaisten suoritusten pääoma-arvoja. Esim.

$$\bar{a}^{\overline{a|a}}_{x:w} = \int_0^{w-x} p^{\overline{a|a}}_{\{x\}+u} \, v^u \, du$$

$$\bar{a}^{\overline{ai|i}}_{[x]+(t):w} = \int_0^{w-x-t} p^{\overline{ai|i}}_{[x]+(t)+u} \, v^u \, du .$$

III EDUSMERKKEJÄ

1. Korko

δ — korkoutuvuus

$$i = e^{\delta} - 1$$

vuotuinen korkokanta = effektiivine vuotuinen korkotuotto laskettuna vu den loppuun.

$$v = e^{-\delta} = \frac{1}{1+i}$$

diskonttotekijä.

$$i^{(m)} = m(e^{\frac{\delta}{m}} - 1)$$

$$= m((1+i)^{\frac{1}{m}} - 1)$$

korkoutuvuutta δ eli vuotuista korkokantaa i vastaava nimellinen korkokanta, kun korko liitetään pääomaan $\frac{1}{m}$ -vuosittain jälkikäteen.

$$\bar{a}_{\overline{t}|} = \int_0^t e^{-\delta u} du = \frac{1 - e^{-\delta t}}{\delta}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = \sum_{j=0}^{n-1} v^j = \frac{1 - v^n}{1 - v}$$

$$a_{\overline{n}|} = \sum_{j=1}^{n} v^j = \ddot{a}_{\overline{n+1}|} - 1$$

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{1}{m} \frac{1 - v^n}{1 - v^{1/m}}$$

$$a^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{1}{m} v^{1/m} \frac{1 - v^n}{1 - v^{1/m}}$$

$$\ddot{a}^{(\infty)}_{\overline{n}|} = a^{(\infty)}_{\overline{n}|} = \bar{a}_{\overline{n}|}$$

2. Kuolevuus, yhden hengen

μ_x kuolevuus

$${}_tp_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+u}\,du}$$ elämistodennäköisyys $x \to x+u$

$${}_tq_x = 1 - {}_tp_x$$ kuolintodennäköisyys

$$l_{x+t} = l_x\, e^{-\int_0^t \mu_{x+u}\,du}$$ elossa olevien luku

3. Perusfunktioita, yhden hengen

$$D_{x+t} = v^{x+t}\, l_{x+t} = D_x\, e^{-\int_0^t (\mu_{x+u} + \delta)\,du} = {}_tp_x\, v^t\, D_x$$

$$\bar{N}_x = \int_0^\infty D_{x+t}\,dt$$

$$N_x = \sum_{j=0}^{\infty} D_{x+j}$$

$$\approx \bar{N}_x + \left(\tfrac{1}{2} + \frac{\mu_x + \delta}{12}\right) D_x \approx \bar{N}_x + \frac{1}{24}\left(D_{x-1} + 12\,D_x - D_{x+1}\right)$$

$$\bar{M}_x = \int_0^\infty D_{x+t}\,\mu_{x+t}\,dt = D_x - \delta\,\bar{N}_x$$

$$\bar{S}_x = \int_0^\infty \bar{N}_{x+t}\,dt$$

$$\bar{R}_x = \int_0^\infty \bar{M}_{x+t}\,dt$$

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\int_0^t (\mu_{x+u} + \delta)du} dt$$

$$= \int_0^n \frac{D_{x+t}}{D_x} dt = \frac{\bar{N}_x - \bar{N}_{x+n}}{D_x}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{D_{x+j}}{D_x} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

$$\approx \bar{a}_{x:\overline{n}|} + \left(\frac{1}{2} + \frac{\delta}{12}\right)\left(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x}\right)$$

$$a_{x:\overline{n}|} = \sum_{j=1}^{n} \frac{D_{x+j}}{D_x} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

$$\approx \bar{a}_{x:\overline{n}|} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta}{12}\right)\left(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x}\right)$$

$$\mathring{a}_{x:\overline{n}|} = a_{x:\overline{n}|} + \frac{1}{D_x} \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^1 t\,\mu_{x+j+t}\, D_{x+j+t}\, dt$$

$$\approx \left(1 - \frac{\delta}{2}\right) \bar{a}_{x:\overline{n}|} + \frac{\delta}{12}\left(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x}\right)$$

$$_{m|n}\bar{a}_x = \bar{a}_{x:\overline{m+n}|} - \bar{a}_{x:\overline{m}|} = \frac{\bar{N}_{x+m} - \bar{N}_{x+m+n}}{D_x}$$

$$\underline{\bar{a}_{x:w}} = \bar{a}_{x:\overline{w-x}|}$$

$$a^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{mn} \frac{D_{x+\frac{j}{m}}}{D_x} = \ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n+\frac{1}{m}}|} - \frac{1}{m}$$

$$\approx \bar{a}_{x:\overline{n}|} - \left(\frac{1}{2m} - \frac{\delta}{12}\right)\left(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x}\right)$$

4. Kuolevuus, kahden tai useamman hengen

$$\mu_{x_1 x_2 \ldots x_k} = \sum_{j=1}^{k} \mu_{x_j}$$

$$p_{x_1 x_2 \ldots x_k} = \prod_{j=1}^{k} p_{x_j} \quad ; \quad q_{x_1 x_2 \ldots x_k} = 1 - p_{x_1 x_2 \ldots x_k}$$

$$l_{x_1+t; x_2+t; \ldots x_k+t} = l_{x_1 x_2 \ldots x_k} \, e^{-\int_0^t \sum \mu_{x_j+u} \, du}$$

$$= \prod_{j=1}^{k} l_{x_j+t}$$

5. Perusfunktioita, kahden tai useamman hengen

$$D_{x_1 x_2 \ldots x_k} = v^{\bar{x}} \, l_{x_1 x_2 \ldots x_k} \,, \qquad \bar{x} = \frac{\sum x_j}{k}$$

$$D_{x_1+t; x_2+t; \ldots x_k+t} = D_{x_1 x_2 \ldots x_k} \, e^{-\int_0^t (\sum \mu_{x_j+u} + \delta) du}$$

$$= {}_t p_{x_1 x_2 \ldots x_k} \, v^t \, D_{x_1 x_2 \ldots x_k}$$

$$\bar{N}_{x_1 x_2 \ldots x_k} = \int_0^{\infty} D_{x_1+t; x_2+t; \ldots x_k+t} \, dt$$

$$\bar{a}_{x_1 x_2 \ldots x_k : \overline{n|}} = \int_0^n e^{-\int_0^t (\sum \mu_{x_j+u} + \delta) du} \, dt$$

$$= \frac{\bar{N}_{x_1 x_2 \ldots x_k} - \bar{N}_{x_1+n; x_2+n; \ldots x_k+n}}{D_{x_1 x_2 \ldots x_k}}$$

$$\bar{a}_{\overline{xy}} = \bar{a}_x + \bar{a}_y - \bar{a}_{xy}$$

$$\bar{a}_{\overline{xyz}} = \bar{a}_x + \bar{a}_y + \bar{a}_z - \bar{a}_{xy} - \bar{a}_{yz} - \bar{a}_{xz} + \bar{a}_{xyz}$$

$$\bar{a}_{\overline{xy}|z} = \bar{a}_z - (\bar{a}_{xz} + \bar{a}_{yz} - \bar{a}_{xyz})$$

6. Maksuja, rahastoja ym. (vrt. 2.5.1.)

A	vastuun pääoma-arvo = rahastokertamaksu (sisältää rahastoitavan kuormituksen)
P	rahastomaksu
V	vakuutusmaksurahasto, muutosarvo
T	takaisinostoarvo; tasoitusvaraus
W	vapaakirja-arvo = vapaakirjan vakuutusmäärä
L	laina-arvo
B	bruttomaksu
z	zillmeerauskerroin

7. Vakuutus- ja korvausmääriä

S	vakuutussumma (vakuutusmäärä)
K	päiväkorvauksen määrä
E	vuosieläkkeen määrä

Vakuutus- tai korvausmäärän laatua tarkemmin ilmaiseva tunnus voidaan kirjoittaa joko päämerkin jälkeen sulkuihin tai, mikäli edellämainittu menetelmä ei sovellu, vasemmaksi yläviitaksi. Esim.

$S(Tp) = {}^{Tp}S$	Tp-vakuutussumma
$K(Sm) = {}^{Sm}K$	Sm-vakuutuksen korvaus päivässä
$E(S) = {}^{S}E$	S-vakuutuksen eläke vuodessa
$E(P) = {}^{P}E$	leskeneläkkeen vuotuinen määrä
$V_E \cdot {}^{z}V_{[x]+t}(EV)$	vanhuuseläkevakuutuksen zillmeerattu rahasto, kun vuotuinen eläkemäärä on V_E.

8. Sairastuvuus

$(m)\ell_x$ sairastuvuus, kun odotusaika on m.

$(m)\varrho_{(x)+t}$ x+t -vuotiaan invaliidin poistuvuus, kun henkilö on sairastunut x-vuotiaana ja odotusaika on m.

$(m)i_x$ sairastumistodennäköisyys vuotta kohti, kun odotusaika on m; ts. todennäköisyys sille, että x-vuotias henkilö sairastuu seuraavan vuoden kuluessa siten, että sairaus kestää kauemmin kuin ajan m.

$(m)r_{(x)+t}$ poistumistodennäköisyys; ts. todennäköisyys sille, että korvaus x+t -vuotiaalle invaliidille päättyy seuraavan vuoden kuluessa, kun henkilö on sairastunut x-vuotiaana.

$(m)s_x$ vakuutusvuoden aikana alkaneen sairaustapauksen aiheuttaman, yksikön suuruisen päiväkorvauksen pääoma-arvo työkyvyttömyyden alkuhetkellä, laskettuna vakuutusvuoden alkaessa vakuutettuna ollutta x-vuotiasta henkilöä kohti; m on odotusaika.

$(m)k_x$ keskimääräinen sairauden kesto, kun odotusaika on m.

$\bar{a}^{a|a}_{x:w}$ aktiivikoron pääoma-arvo x-vuotiaalle aktiiville.

$\bar{a}^{a|i}_{x:w}$ invaliidikoron pääoma-arvo x-vuotiaalle aktiiville.

$\bar{a}^{i|i}_{x:w}$ invaliidikoron pääoma-arvo x-vuotiaalle invaliidille.

$\bar{a}^{\overline{ii}|i}_{(x)+t:w}$ invaliidikoron pääoma-arvo x+t -vuotiaalle invaliidille, joka on tullut invaliidiksi x-vuotiaana.

9. Perhe-eläke, osittain tai kokonaan kollektiivinen

Seuraavassa tarkoitetaan perheenjäsenillä vain eläkkeeseen oikeutettuja perheenjäseniä.

n_x x-vuotiaan miehen suhteellinen aviollisuus, ts. x-vuotiaiden naimisissa olevien miesten suhteellinen lukumäärä.

n_y y-vuotiaan naisen suhteellinen aviollisuus.

y_x x-vuotiaan miehen vaimon keskimääräinen ikä.

z_x x-vuotiaan miehen lasten keskimääräinen ikä.

$b_x^{(j)}(z)$ todennäköisyys sille, että x-vuotiaalla miehellä on j z-vuotiasta lasta (j=1, 1 lapsi; j=2, kaksoset; jne).

$$b_x(z) = \sum_j j\, b_x^{(j)}(z)$$

x-vuotiaan miehen z-vuotiaiden lasten keskimääräinen luku.

$\sum_{z=0}^{20} b_x(z)$ x-vuotiaan miehen alle 21-vuotiaiden lasten keskimääräinen luku.

$$\prod_j \prod_{z=0}^{20} \left[1 - b_x^{(j)}(z)\right]$$

todennäköisyys sille, että x-vuotias mies on lapseton.

g_x x-vuotiaan miehen kaikkien lasten heti alkavien eläkkeiden yhteenlaskettu pääoma-arvo, kunkin lapsen eläkkeen ollessa 1 vuodessa.

g_y g_x:ää vastaava suure y-vuotiaalle naiselle.

h_x x-vuotiaan miehen lapsille yhteisesti suoritettavan, heti alkavan eläkkeen pääoma-arvo, yhteisen eläkkeen ollessa 1 vuodessa (eläkettä suoritetaan niin kauan kuin yksikin lapsista elää).

10. Kuormitusparametrejä

α kertakaikkinen, vakuutussummaan verrannollinen kuormituserä, lähinnä hankintakuluja varten.

β vuotuinen vakuutussummaan verrannollinen kuormituserä, lähinnä hoitokuluja varten; voi sisältää myös varmuuslisän.

γ vuotuinen vakuutusmaksuun verrannollinen kuormituserä, hoito- ja perimiskuluja varten; voi sisältää myös varmuuslisän.

ε vuotuinen vakuutussummaan verrannollinen kuormituserä, hoito- ja hankintakuluja varten; voi sisältää myös varmuuslisän.

$\varkappa$ vuotuinen vakuutusmaksuun verrannollinen kuormituserä, hoito-, hankinta- ja perimiskuluja varten; voi sisältää myös varmuuslisän.

Kuormitusjärjestelmät (α, β, γ) ja (ε, $\varkappa$) vastaavat toisiaan sillä tavalla, että edellisen järjestelmän kertakaikkinen α- kuormituserä sisältyy jälkimäisessä vuotuisiin kuormituseriin ε ja $\varkappa$.

K 57,4 1/2 %, δ = 0,0440169

x	D_x	$\bar{N}_x$	$\bar{M}_x$	N_x	$\frac{10^6}{D_x}$	x	D_x	$\bar{N}_x$	$\bar{M}_x$	N_x	$\frac{10^6}{D_x}$
1	956 938	20 095 199	72 410	20 577 298	1,04500	61	52 493	543 077	28 588	569 609	19,0502
	914 357	19 159 713	71 006	19 620 360	1,09366		49 131	492 275	27 463	517 116	20,3537
	873 672	18 265 853	69 666	18 706 003	1,14459		45 887	444 776	26 309	467 985	21,7927
	834 796	17 411 767	68 384	17 832 331	1,19790		42 757	400 463	25 130	422 098	23,3880
5	797 651	16 595 684	67 161	16 997 535	1,25368	65	39 740	359 224	23 928	379 341	25,1636
	762 158	15 815 914	65 991	16 199 884	1,31206		36 833	320 947	22 706	339 601	27,1496
	728 245	15 070 841	64 874	15 437 726	1,37316		34 035	285 522	21 467	302 768	29,3815
	695 840	14 358 922	63 805	14 709 481	1,43711		31 344	252 841	20 215	268 733	31,9040
	664 878	13 678 680	62 785	14 013 641	1,50404		28 760	222 798	18 953	237 389	34,7705
10	635 293	13 028 707	61 810	13 348 763	1,57408	70	26 284	195 285	17 688	208 629	38,0460
	607 025	12 407 655	60 879	12 713 470	1,64738		23 915	170 195	16 424	182 345	41,8148
	580 014	11 814 238	59 988	12 106 445	1,72410		21 655	147 419	15 169	158 430	46,1787
	554 206	11 247 226	59 138	11 526 431	1,80438		19 505	126 848	13 922	136 775	51,2689
	529 545	10 705 444	58 325	10 972 225	1,88841		17 468	108 371	12 698	117 270	57,2475
15	505 982	10 187 770	57 548	10 442 680	1,97635	75	15 544	91 875	11 500	99 802	64,3335
	483 468	9 693 130	56 807	9 936 698	2,06839		13 737	77 244	10 337	84 258	72,7961
	461 955	9 220 500	56 097	9 453 230	2,16471		12 047	64 362	9 214	70 521	83,0082
	441 400	8 768 901	55 420	8 991 275	2,26552		10 478	53 109	8 140	58 474	95,4381
	421 759	8 337 396	54 773	8 549 875	2,37102		9 030	43 365	7 122	47 996	110,742
20	402 992	7 925 091	54 154	8 128 116	2,48144	80	7 705	35 008	6 164	38 966	129,786
	385 061	7 531 133	53 564	7 725 124	2,59699		6 503	27 914	5 274	31 261	153,775
	367 927	7 154 704	52 999	7 340 063	2,71793		5 422	21 962	4 455	24 758	184,434
	351 555	6 795 025	52 459	6 972 136	2,84451		4 462	17 030	3 712	19 336	224,115
	335 912	6 451 351	51 944	6 620 581	2,97697		3 620	12 999	3 048	14 874	276,243
25	320 965	6 122 969	51 451	6 284 669	3,11560	85	2 890	9 753	2 461	11 254	346,021
	306 683	5 809 199	50 980	5 963 704	3,26070		2 268	7 182	1 952	8 364	440,917
	293 037	5 509 391	50 531	5 657 021	3,41254		1 747	5 183	1 519	6 096	572,410
	279 998	5 222 923	50 101	5 363 984	3,57145		1 317	3 658	1 156	4 549	759,301
	267 539	4 949 202	49 691	5 083 986	3,73777		971	2 521	860	3 032	1029,87
30	255 634	4 687 660	49 298	4 816 447	3,91184	90	698	1 692	624	2 061	1432,66
	244 260	4 437 756	48 924	4 560 813	4,09400		489				
	233 391	4 198 972	48 565	4 316 553	4,28466		332				
	222 990	3 970 819	48 207	4 083 162	4,48451		218				
	213 021	3 752 848	47 832	3 860 172	4,69437		138				
35	203 464	3 544 639	47 440	3 647 151	4,91487	95	84				
	194 300	3 345 789	47 029	3 443 687	5,14668		49				
	185 513	3 155 913	46 600	3 249 387	5,39046		27				
	177 085	2 974 644	46 150	3 063 874	5,64701		14				
	169 000	2 801 629	45 681	2 886 789	5,91716		7				
40	161 242	2 636 535	45 190	2 717 789	6,20186	100	3				
	153 796	2 479 041	44 676	2 556 547	6,50212						
	146 648	2 328 843	44 140	2 402 751	6,81905						
	139 785	2 185 650	43 579	2 256 103	7,15384						
	133 194	2 049 183	42 995	2 116 318	7,50785						
45	126 861	1 919 176	42 385	1 983 124	7,88264						
	120 775	1 795 378	41 748	1 856 263	8,27986						
	114 924	1 677 548	41 084	1 735 488	8,70140						
	109 298	1 565 455	40 392	1 620 564	9,14930						
	103 886	1 458 881	39 671	1 511 266	9,62594						
50	98 678	1 357 615	38 920	1 407 380	10,1340						
	93 665	1 261 460	38 139	1 303 702	10,6763						
	88 837	1 170 224	37 327	1 215 037	11,2566						
	84 187	1 083 726	36 485	1 126 200	11,8783						
	79 705	1 001 794	35 609	1 042 013	12,5463						
55	75 386	924 262	34 703	962 308	13,2651						
	71 220	850 971	33 763	886 932	14,0410						
	67 203	781 772	32 792	815 702	14,8803						
	63 327	716 518	31 788	748 499	15,7911						
	59 586	655 073	30 752	685 172	16,7825						
60	55 977	597 302	29 686	625 586	17,8645						

PERUSLUKUJA

K57a 4½% δ = 0,0440169

X	μ_x ‰	q_x ‰	l_x	X	μ_x ‰	q_x ‰	l_x
1	1.50	1.50	1 046 568	46	4.92	5.13	960 896
2	1.50	1.50	1 045 000	47	5.38	5.62	955 964
3	1.50	1.50	1 043 434	48	5.90	6.16	950 588
4	1.50	1.50	1 041 869	49	6.46	6.75	944 736
5	1.50	1.50	1 040 308	50	7.08	7.39	938 364
6	1.50	1.50	1 038 749	51	7.76	8.09	931 431
7	1.50	1.50	1 037 192	52	8.50	8.86	923 897
8	1.50	1.50	1 035 637	53	9.31	9.70	915 711
9	1.50	1.50	1 034 085	54	10.20	10.62	906 824
10	1.50	1.50	1 032 535	55	11.18	11.64	897 189
11	1.50	1.50	1 030 988	56	12.25	12.74	886 749
12	1.50	1.50	1 029 442	57	13.42	13.95	875 454
13	1.50	1.50	1 027 899	58	14.70	15.27	863 241
14	1.50	1.50	1 026 358	59	16.10	16.72	850 057
15	1.50	1.50	1 024 820	60	17.64	18.31	835 843
16	1.50	1.50	1 023 284	61	19.33	20.04	820 542
17	1.50	1.50	1 021 750	62	21.18	21.93	804 102
18	1.50	1.50	1 020 219	63	23.20	24.00	786 469
19	1.50	1.50	1 018 689	64	25.42	26.27	767 594
20	1.50	1.50	1 017 162	65	27.85	28.74	747 431
21	1.50	1.50	1 015 638	66	30.51	31.44	725 951
22	1.50	1.50	1 014 115	67	33.43	34.40	703 125
23	1.50	1.50	1 012 596	68	36.62	37.62	678 940
24	1.50	1.50	1 011 077	69	40.12	41.14	653 397
25	1.50	1.50	1 009 562	70	43.96	44.99	626 515
26	1.50	1.50	1 008 049	71	48.16	49.18	598 330
27	1.50	1.50	1 006 538	72	52.77	53.75	568 906
28	1.50	1.50	1 005 030	73	57.81	58.73	538 328
29	1.50	1.50	1 003 523	74	63.34	64.17	506 709
30	1.50	1.50	1 002 019	75	69.39	70.08	474 196
31	1.50	1.50	1 000 516	76	76.02	76.52	440 964
32	1.50	1.50	999 017	77	83.29	83.51	407 223
33	1.50	1.57	997 519	78	91.25	91.13	373 214
34	1.64	1.72	995 954	79	99.97	99.38	339 205
35	1.80	1.88	994 242	80	109.53	108.36	305 493
36	1.97	2.06	992 370	81	120.00	118.07	272 391
37	2.16	2.26	990 321	82	131.47	128.60	240 229
38	2.37	2.47	988 083	83	144.04	140.00	209 334
39	2.59	2.71	985 638	84	157.81	152.30	180 028
40	2.84	2.97	982 964	85	172.89	165.59	152 610
41	3.11	3.25	980 043	86	189.42	179.89	127 338
42	3.41	3.57	976 853	87	207.52	195.31	104 431
43	3.74	3.90	973 368	88	227.36	211.85	84 035
44	4.10	4.28	969 568	89	249.09	229.58	66 232
45	4.49	4.69	965 421	90	272.90	248.54	51 026